

DOI:10.13409/j.cnki.jdpme.20211120041

# 冻融作用下非饱和土热水力耦合数值模拟\*

刘恩龙<sup>1,2</sup>, 尹霄<sup>1</sup>, 张冲<sup>1</sup>, 宋丙堂<sup>2</sup>, 肖薇<sup>1</sup>

(1. 四川大学水利水电学院, 四川 成都 610065; 2. 中国科学院西北生态环境资源研究院冻土工程国家重点实验室, 甘肃 兰州 730000)

**摘要:** 基于多孔介质力学建立非饱和土在冻结过程中的耦合方程并进行单向冻融过程的数值求解及模拟分析。把非饱和冻土当作固体土颗粒、未冻水、冰晶及孔隙气组成的多孔多相介质, 在小变形假定下建立了考虑冰-水、水-水汽相变的非饱和冻土的质量守恒、动量守恒方程, 以及能量方程、耗散不等式、热平衡方程。结合冻融过程中的渗透特性以及应力应变关系, 对单向冻融条件下的非饱和土柱封闭系统进行了数值求解, 计算结果表明冷端冻结温度的数值对非饱和土柱的顶部位移影响较大, 而对温度场的分布规律以及冻结区的含水率分布影响较小。研究结果可为寒区非饱和土工程的设计和施工提供指导。

**关键词:** 冻融; 非饱和土; 相变; 热水力耦合

**中图分类号:** TU443 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-2132(2022)05-0953-08

## Numerical Simulation of Thermo-hydro-mechanical Coupling for Unsaturated Soil Subjected to Freezing-thawing Actions

LIU Enlong<sup>1,2</sup>, YIN Xiao<sup>1</sup>, ZHANG Chong<sup>1</sup>, SONG Bingtang<sup>2</sup>, XIAO Wei<sup>1</sup>

(1. College of Water Resources and Hydropower, Sichuan University, Chengdu 610065, China;  
2. Northwest Institute of Eco-Environment and Resources, State Key Laboratory of Frozen Soil Engineering, Chinese Academy of Science, Lanzhou 730000, China)

**Abstract:** Based on poromechanics, coupling equations for unsaturated soil in the freezing process are proposed, based on which numerical simulations under the un-directional freezing and thawing process are carried out. The unsaturated frozen soil is dealt with porous media composed of solid soil grains, unfrozen water, ice crystals, and in-pore gases. The coupling equations, including mass conservation, momentum balance, energy conservation, dissipation inequality, and thermal balance equation, are derived considering the phase changes of ice-water and water-vapor on the assumption of infinitesimal transformations. Combining permeability and stress-strain features under the freezing and thawing process, numerical solutions are carried out on closed unsaturated soil columns subjected to freezing and thawing cycles. The computational results demonstrate that the values of freezing temperature at the cold end affect the displacement distribution of the upper surface greatly, but have a slight influence on the temperature distribution and water contents in frozen zones of the unsaturated soil column. The results can provide a guidance for design and construction in unsaturated soil in cold regions.

**Keywords:** freezing and thawing; unsaturated soil; phase change; thermo-hydro-mechanical coupling

\* 收稿日期: 2021-11-13; 修回日期: 2021-12-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(41790431, 41771066)资助

作者简介: 刘恩龙(1976—), 男, 教授, 博导, 博士。主要从事土的本构关系研究。E-mail: liuenlong@scu.edu.cn

## 引言

对于季节性冻土区以及多年冻土区的非饱和土层,在冻融循环作用下会使其力学特性可能弱化,以及物理性质发生变化,从而导致地基过大的变形或者破坏而引起工程事故<sup>[1-2]</sup>。此外,在高海拔寒冷地区的土石坝心墙土料是非饱和的,在冬季填筑过程中也涉及到冻融作用,比如两河口以及双江口大坝心墙的冬季施工。非饱和土在冻融作用下会出现水分场、温度场、应力场或变形场的耦合相互作用,且冰水相变会显著改变土层内的冷生构造分布以及渗透特性。因为非饱和土在冻融作用下的耦合作用机理较为复杂,所以目前该方面的研究还处于探索阶段。可见,研究非饱和土在冻融作用下的耦合作用机理具有较大的工程应用价值和理论意义。

冻土的热水力耦合作用研究取得了许多研究成果,目前主要是针对饱和和冻土进行的,主要包括模型试验、耦合理论分析以及数值模拟<sup>[3-5]</sup>。当温度变化时,冰水会发生相变,引起渗透特性以及应力变化的变化;当外部荷载作用引起应力变化时,土颗粒会位移,引起孔隙压力及渗透特性变化,从而改变热传输过程;当孔隙压力变化时,应力分布会发生变化导致土颗粒发生位移以及热量的传输变化。当孔隙中有气体存在时,吸力的作用使得非饱和土在冻融过程中的耦合机理更加复杂。非饱和土的吸力变化会导致孔隙流体的渗透特性发生变化,且由于冻结与融化过程的冰水相变压力不同,从而导致冻融化过程中的渗透特性满足的规律亦不同。尽管在非饱和土的冻结过程水热耦合分析方面开展了试验和数值模拟<sup>[1,5]</sup>,以及在饱和土冻融过程的热水力耦合方面的数值分析方面已取得了一些研究进展,但是由于非饱和土在冻融过程中的复杂性,目前在非饱和土冻融过程中的热水力耦合数值分析方面的研究成果却鲜有报道。可见,有必要开展冻融作用下非饱和土的热水力耦合数值分析,从而为我国寒区工程基础设施的设计和施工提供理论依据。

本文在已完成的饱和和冻土的热水力耦合分析以及非饱和冻土的冻胀数值分析基础上<sup>[6-7]</sup>,首先建立非饱和土在冻结过程中的热水力耦合方程,然后在一维条件下考虑冻结和融化过程的影响,对耦合方程进行数值求解,最后分析了冻融过程中温度场、位移场以及水分场的变化规律。

## 1 非饱和土在冻结过程中的耦合方程

本文假定小变形,取冻结过程中的非饱和冻土单元(REV)为研究对象,它包括固体土颗粒、冰晶、未冻水以及孔隙气体(包含干气以及水汽)。孔隙率 $\phi$ 可分为冰的孔隙率 $\phi_c$ 、水的孔隙率 $\phi_w$ 以及孔隙气的孔隙率 $\phi_g$ :

$$\phi = \phi_c + \phi_w + \phi_g \quad (1)$$

当前孔隙率 $\phi_\alpha$ ( $\alpha=c, w, g$ )为初始的孔隙率与变化的孔隙率之和,表达为:

$$\phi_\alpha = \phi_0 S_\alpha + \varphi_\alpha \quad (2)$$

且,

$$S_c + S_w + S_g = 1 \quad (3)$$

式中, $c$ 表示冰晶; $w$ 表示未冻水; $g$ 表示气体; $S_\alpha$ ( $\alpha=c, w, g$ )为相应的饱和度; $\varphi_\alpha$ ( $\alpha=c, w, g$ )表示由于孔隙的变形引起的孔隙体积变化; $\phi_0$ 是初始的孔隙率。

当非饱和冻土受到荷载作用或者温度变化时,孔隙空间的变化会引起孔隙体积变化,表示为:

$$\varphi = \phi - \phi_0 = \varphi_c + \varphi_w + \varphi_g \quad (4)$$

随着温度的变化,当相变发生时,对于非饱和冻土这一多孔介质材料单元,需要满足质量守恒、动量守恒、能量守恒以及热力学第二定律<sup>[8]</sup>。

### 1.1 质量守恒方程

对于非饱和冻土单元,固体土颗粒满足连续性条件,而未冻水会相变成冰,且未冻水会汽化为孔隙气中的水蒸汽。忽略冻融过程中冰与水汽的转化。因此,对于土颗粒、冰晶、未冻水以及孔隙气体,满足如下的连续性方程:

$$\frac{\partial(\rho_s(1-\phi))}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s(1-\phi)v^s) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho_c\phi_c)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_c\phi_c v^c) = -M_{c \rightarrow w} \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho_w\phi_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w\phi_w v^w) = M_{c \rightarrow w} - M_{w \rightarrow va} \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho_g\phi_g)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g\phi_g v^g) = M_{w \rightarrow va} \quad (8)$$

式中, $\rho_\pi$ ( $\pi=s, c, w, g$ )为固体土颗粒、冰晶、水以及气体的密度; $v^s$ 和 $v^\alpha$ ( $\alpha=c, w, g$ )是土颗粒以及孔隙相(冰晶、未冻水以及孔隙气)的速度,表示为

$$v^\pi(x, t) = \frac{d^\pi x}{dt} \quad (\pi=s, c, w, g), \text{ 其中 } x \text{ 表示当前的}$$

位置,  $\frac{d^{\pi} \mathbf{x}}{dt}$  为对  $\pi$  组分的物质导数;  $M_{c \rightarrow w}$  表示单位时间单位体积内冰晶转化为水的质量;  $M_{w \rightarrow va}$  表示单位时间内水转化为水汽的质量, 其中, va 表示水蒸汽。计算中假定冰晶的速度与土颗粒的相同。

## 1.2 动量平衡方程

由动量守恒定律可以得到非饱和冻土的运动方程, 根据线性动量定理, 得到如下表达式:

$$\begin{aligned} & \frac{d^s}{dt} \int_{\Omega} \rho_s (1 - \phi) \mathbf{v}^s d\Omega + \sum_{\alpha=c, w, g} \frac{d^{\alpha}}{dt} \int_{\Omega} \rho_{\alpha} n S_{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha} d\Omega = \\ & \int_{\Omega} \left( \rho_s (1 - \phi) \boldsymbol{\gamma}^s + \sum_{\alpha=c, w, g} \rho_{\alpha} n S_{\alpha} \boldsymbol{\gamma}^{\alpha} \right) d\Omega + \\ & \int_{\Omega} \left( M_{c \rightarrow w} (\mathbf{v}^w - \mathbf{v}^c) + M_{w \rightarrow va} (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^w) \right) d\Omega \quad (9) \end{aligned}$$

式中,  $\rho_s (1 - \phi) \mathbf{v}^s$  和  $\rho_{\alpha} n S_{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha}$  ( $\alpha = c, w, g$ ) 分别表示土颗粒、冰晶、未冻水以及孔隙气的线性动量;  $\boldsymbol{\gamma}^s$  和  $\boldsymbol{\gamma}^{\alpha}$  分别是土颗粒、冰晶、未冻水以及孔隙气的加速度, 表达为  $\boldsymbol{\gamma}^{\pi}(\mathbf{x}, t) = \frac{d^{\pi} \mathbf{v}}{dt}$  ( $\pi = s, c, w, g$ );  $M_{c \rightarrow w} (\mathbf{v}^w - \mathbf{v}^c)$  和  $M_{w \rightarrow va} (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^w)$  分别是由于冰水以及未冻水与水汽之间相变引起的动量变化。

经过推导, 可以得到如下的非饱和冻土的运动方程:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_s (1 - \phi) (\mathbf{g} - \boldsymbol{\gamma}^s) + \sum_{\alpha=c, w, g} \rho_{\alpha} n S_{\alpha} (\mathbf{g} - \boldsymbol{\gamma}^{\alpha}) - \\ & M_{c \rightarrow w} (\mathbf{v}^w - \mathbf{v}^c) - M_{w \rightarrow va} (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^w) = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

式中,  $\boldsymbol{\sigma}$  是应力;  $\mathbf{g}$  是重力加速度。

## 1.3 能量守恒方程

基于热力学第一定律, 可以得到非饱和冻土的能量方程, 表示如下:

$$\begin{aligned} & \frac{d^s}{dt} \int_{\Omega} \rho_s (1 - \phi) \left( e_s + \frac{1}{2} (\mathbf{v}^s)^2 \right) d\Omega + \\ & \sum_{\alpha=c, w, g} \frac{d^{\alpha}}{dt} \int_{\Omega} \rho_{\alpha} n S_{\alpha} \left( e_{\alpha} + \frac{1}{2} (\mathbf{v}^{\alpha})^2 \right) d\Omega = \\ & P_{f, T}(\mathbf{v}^s, \mathbf{v}^{\alpha}) + Q \quad (11) \end{aligned}$$

式中,  $e_{\pi}$  ( $\pi = s, c, w, g$ ) 为每组分的比内能;  $P_{f, T}(\mathbf{v}^s, \mathbf{v}^{\alpha})$  为外部作用功率, 表示为:

$$\begin{aligned} & P_{f, T}(\mathbf{v}^s, \mathbf{v}^{\alpha}) = \mathcal{P}_{\text{def}}(\mathbf{v}^s, \mathbf{v}^{\alpha}) + \frac{d^s K_s}{dt} + \sum_{\alpha=c, w, g} \frac{d^{\alpha} K_{\alpha}}{dt} - \\ & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( M_{c \rightarrow w} \left( (\mathbf{v}^w - \mathbf{v}^s)^2 - (\mathbf{v}^c - \mathbf{v}^s)^2 \right) + \right. \\ & \left. M_{w \rightarrow va} \left( (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s)^2 - (\mathbf{v}^w - \mathbf{v}^s)^2 \right) \right) d\Omega \quad (12) \end{aligned}$$

且  $\mathcal{P}_{\text{def}}(\mathbf{v}^s, \mathbf{v}^{\alpha})$  为应变功率, 表示为:

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{\text{def}}(\mathbf{v}^s, \mathbf{v}^{\alpha}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^s d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \sum_{\alpha=c, w, g} \left[ \nabla \cdot \left( \frac{p_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \boldsymbol{\omega}^{\alpha} \right) - (\mathbf{g} - \boldsymbol{\gamma}^{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\omega}^{\alpha} \right] d\Omega \quad (13) \end{aligned}$$

$\mathbf{d}^{\pi} = \frac{1}{2} (\nabla_x \mathbf{v}^{\pi} + {}^t \nabla_x \mathbf{v}^{\pi})$  为每组分的应变率张量;  $p_{\alpha}$  ( $\alpha = c, w, g$ ) 为相应的压力;  $\boldsymbol{\omega}^{\alpha} = \rho_{\alpha} \boldsymbol{\vartheta}$  为流体质量流量,  $\boldsymbol{\vartheta} = \phi_{\alpha} (\mathbf{v}^{\alpha} - \mathbf{v}^s)$ ;  $K_{\pi}$  为动能, 表示为:

$$K_s = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_s (1 - n) (\mathbf{v}^s)^2 d\Omega \quad (14)$$

$$\sum_{\alpha=c, w, g} K_{\alpha} = \sum_{\alpha=c, w, g} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_{\alpha} n_{\alpha} (\mathbf{v}^{\alpha})^2 d\Omega \quad (15)$$

$Q$  为外部供热功率, 表示为:

$$Q = \int_{\partial\Omega} J_Q(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) da + \int_{\Omega} r_Q(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (16)$$

式中,  $J_Q = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  表示  $da$  的单位外法向;  $r_Q$  是外部热源提供的热密度。

经过推导, 可以得到非饱和冻土的能量守恒方程如下:

$$\begin{aligned} & \frac{d^s e}{dt} + e \nabla \cdot \mathbf{v}^s = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^s - \sum_{\alpha=c, w, g} \nabla \cdot (h_{\alpha} \boldsymbol{\omega}^{\alpha}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \\ & r_Q + \sum_{\alpha=c, w, g} (\mathbf{g} - \boldsymbol{\gamma}^{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\omega}^{\alpha} + \frac{1}{2} M_{c \rightarrow w} \left[ (\mathbf{v}^w - \right. \\ & \left. \mathbf{v}^s)^2 - (\mathbf{v}^c - \mathbf{v}^s)^2 \right] + \frac{1}{2} M_{w \rightarrow va} \left[ (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s)^2 - \right. \\ & \left. (\mathbf{v}^w - \mathbf{v}^s)^2 \right] \quad (17) \end{aligned}$$

式中,  $e = \rho_s (1 - \phi) e_s + \sum_{\alpha=c, w, g} \rho_{\alpha} \phi_{\alpha} e_{\alpha}$  是总内能;  $h_{\alpha} = e_{\alpha} + \frac{p_{\alpha}}{\rho_{\alpha}}$  ( $\alpha = c, w, g$ ) 是流体的比焓。

## 1.4 热力学第二定律与热平衡方程

基于热力学第二定律, 可以得到相变发生时非饱和冻土的 Clausius-Duhem 不等式, 表示为:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\sigma} : \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} + \sum_{\alpha=c, w, g} g_{\alpha} \frac{dm_{\alpha}}{dt} - \theta \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} - (g_w - \\ & g_c) M_{c \rightarrow w} - (g_a - g_w) M_{w \rightarrow va} - \frac{1}{2} M_{c \rightarrow w} \left[ (\mathbf{v}^w - \right. \\ & \left. \mathbf{v}^s)^2 - (\mathbf{v}^c - \mathbf{v}^s)^2 \right] - \frac{1}{2} M_{w \rightarrow va} \left[ (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^s)^2 - \right. \\ & \left. (\mathbf{v}^w - \mathbf{v}^s)^2 \right] - \sum_{\alpha=c, w, g} (\nabla g_{\alpha} + \theta \nabla T - (\mathbf{g} - \\ & \boldsymbol{\gamma}^{\alpha})) \cdot \boldsymbol{\omega}_{\alpha} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla T \geq 0 \quad (18) \end{aligned}$$

式中,  $\boldsymbol{\epsilon}$  是应变张量;  $\theta = \rho_s (1 - \phi) \theta_s + \sum_{\alpha=c, w, g} \rho_{\alpha} \phi_{\alpha} \theta_{\alpha}$ ,

且 $\theta_s, \theta_\alpha (\alpha=c, w, g)$ 表示土颗粒以及孔隙相组分的比熵; $g_\alpha = h_\alpha - T\theta_\alpha$ 是流体的比自由焓, $T$ 是温度且在单元体内均匀分布; $m_\alpha = \rho_\alpha \phi_\alpha (\alpha=c, w, g)$ 是流体质量; $\psi = e - T\theta$ 是亥姆赫兹自由能。

不等式(18)左边表征的初始单位体积的总耗散,可用 $\Phi$ 表示。众所周知,热力学第二定律需要耗散非负。 $\Phi$ 可以分解为每项都不小于零的四项,表示如下:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 \quad (19)$$

式中, $\Phi_{int}$ 是 $\Phi_1$ 和 $\Phi_4$ 之和,且 $\Phi_1$ 为与固体骨架运动相关的内部耗散有关, $\Phi_4$ 为与相变相关的耗散; $\Phi_2$ 为与热传导相关的耗散; $\Phi_3$ 与孔隙质量传输相关的耗散。每项耗散的具体表达式如下:

$$\Phi_1 = \sigma: \frac{d\epsilon}{dt} + \sum_{\alpha=c,w,g} g_\alpha \frac{dm_\alpha}{dt} - \theta \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} \quad (20)$$

$$\Phi_2 = -\frac{q}{T} \cdot \nabla T \quad (21)$$

$$\Phi_3 = \sum_{\alpha=c,w,g} (\nabla g_\alpha + \theta \nabla T - (g - \gamma^\alpha)) \cdot w^\alpha \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Phi_4 = & (g_w - g_c) M_{c \rightarrow w} - (g_a - g_w) M_{w \rightarrow va} - \\ & \frac{1}{2} M_{c \rightarrow w} [(v^w - v^s)^2 - (v^c - v^s)^2] - \\ & \frac{1}{2} M_{w \rightarrow va} [(v^a - v^s)^2 - (v^w - v^s)^2] \end{aligned} \quad (23)$$

结合能量守恒方程(17),可以得到非饱和冻土单元的热平衡方程:

$$\begin{aligned} T \left( \frac{d\theta}{dt} + \sum_{\alpha=c,w,g} \nabla \cdot (\theta_\alpha w^\alpha) \right) = r_Q - \nabla \cdot q + \Phi_1 + \\ \Phi_3 + \Phi_4 = r_Q - \nabla \cdot q + \Phi_M + \Phi_4 \end{aligned} \quad (24)$$

式中, $\Phi_M = \Phi_1 + \Phi_3$ 是由于不可恢复的位移产生的机械耗散。

### 1.5 孔隙相的热传导与质量传输

对于流体( $\alpha=c, w, g$ ),采用如下的流体质量传输方程:

$$\frac{w^\alpha}{\rho_\alpha} = k_\alpha \cdot (-\nabla_x p_\alpha + \rho_\alpha (g - \gamma^\alpha)) \quad (25)$$

式中, $k_\alpha$ 为渗透张量; $p_\alpha$ 为流体压力。

热传导方程为:

$$q = -\kappa \cdot \nabla T \quad (26)$$

式中, $\kappa$ 为热传导张量。

对于以上推导得到的非饱和冻土耦合方程,添加冰-水相变以及水-水汽相变满足的判断条件,在考虑到具体的本构方程,并结合相应的边界条件就可以进行非饱和冻土中的温度场、应力场(或变形

场)、渗流场的耦合求解。

## 2 非饱和土在单向冻融过程中的数值分析

基于以上建立的非饱和冻土的多物理场耦合方程,并考虑冻结过程与融化过程的不同,本节对单向冻融条件下的非饱和土柱进行热水力耦合数值分析<sup>[7, 9-10]</sup>。

### 2.1 非饱和土单向冻融耦合方程

图1为非饱和土单向冻结/融化过程计算示意图,试样底部为暖端,温度保持不变,顶部温度可以变化来模拟冻结和融化过程。竖直方向为 $x$ 正向,底部为坐标原点。简化考虑,孔隙气压力始终假定为大气压力。

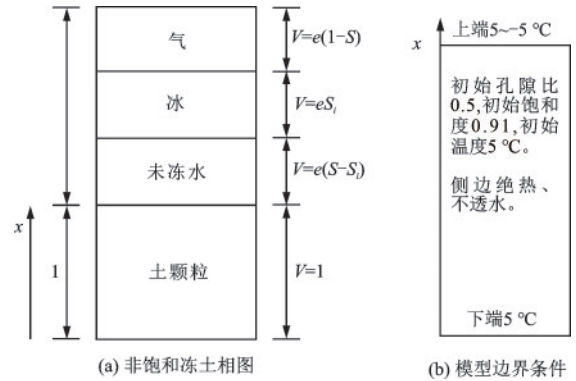


图1 非饱和土冻融过程计算模型

Fig. 1 Computational model for unsaturated soil in the freezing-thawing process

在一维条件下,非饱和冻土的耦合方程简化为:

$$\frac{d\sigma_v}{dx} + \gamma = 0 \quad (27)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{e_0 - e}{1 + e_0} \quad (28)$$

$$\frac{\partial S}{\partial e} = -\frac{S(1-S)^{\beta'}}{e} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{e(\rho_i - \rho_w)}{\rho_w(1+e)} \frac{\partial S_i}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho_i + \rho_w(S - S_i) + \rho_w e}{\rho_w(1+e)} \frac{\partial S}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial t} = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\left(C - \frac{L\rho_i e}{1+e} \frac{\partial S_i}{\partial T}\right) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{L\rho_i e}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + C_w k \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (31)$$

式中,  $\sigma_v$  为竖向应力;  $u$  为位移( $x$ 方向);  $e$  为当前孔隙比;  $e_0$  为初始孔隙比;  $S$  为饱和度;  $\rho_i, \rho_w$  分别为冰和水的密度;  $k$  为渗透系数;  $\psi$  为水头;  $C$  为土的体积热容量( $\text{kJ}/(\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C})$ );  $\gamma$  为土的重度;  $S_i$  为含冰量;  $\lambda$  为土的导热系数( $\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ );  $L$  为潜热。

在冻/融过程中,有以下表达式:

$$\psi = x + \frac{\rho_w}{\rho_w g} \quad (32)$$

$$C = \frac{1}{1+e} (C_s + e(S - S_i)C_w + eS_i C_i + e(1 - S)C_v) \quad (33)$$

式中,  $C_w, C_i, C_s$  分别为水、冰以及土颗粒的体积热容量;  $C_v$  为空气体积热容量。

土的重度表示为:

$$\gamma = \frac{g}{1+e} (\rho_s + eS_i \rho_i + e(1 - S_i) \rho_w) \quad (34)$$

式中,  $g$  为重力加速度( $\text{m}/\text{s}^2$ );  $\rho_w, \rho_i, \rho_s$  分别为水、冰及土颗粒的密度( $\text{kg}/\text{m}^3$ )。

含冰量随温度而变化,表示为:

$$S_i = \begin{cases} S(1 - [1 - (T - T_0)]^a) & T \leq T_0 \\ 0 & T > T_0 \end{cases} \quad (35)$$

导热系数表示为:

$$\lambda = \lambda_s \frac{1}{1+e} \lambda_w \frac{e(S - S_i)}{1+e} \lambda_i \frac{eS_i}{1+e} \lambda_v \frac{e(1 - S)}{1+e} \quad (36)$$

式中,  $\lambda_w, \lambda_i, \lambda_s$  分别为水、冰以及土颗粒的导热系数;  $\lambda_v$  为空气的导热系数。

计算时冻结区与融化区的本构关系均采用弹性的应力应变关系,且压缩模量  $E_s$  和渗透系数  $k$  的表达式分别为:

$$E_s = \begin{cases} E_{sf} & T \leq T_0 \\ E_{s0} \left( \frac{1 + e_0}{1 + e} \right)^m & T > T_0 \end{cases} \quad (37)$$

$$k = \begin{cases} k_p \left( \frac{1 + e}{1 + e_p} \right)^n & T > T_0, x > x_{sep} \\ k_0 [1 - (T - T_0)]^\beta & T \leq T_0, x > x_{sep} \\ 0 & T \leq T_0, x \leq x_{sep} \end{cases} \quad (38)$$

式中,  $T_0$  为孔隙水冻结温度;  $x_{sep}$  为孔隙比达到分离孔隙比  $e_{sep}$  的位置坐标,且当孔隙比达到分离孔隙比时冰透镜体开始生成;  $m, n, \beta$  为计算参数。

## 2.2 非饱和土单向冻/融数值分析

数值模拟所采用的试样高度为 15 cm,初始含水率为 16.8%,初始孔隙比为 0.5,初始饱和度为 91%,初始时刻试样温度为 5 °C。试样的侧面绝热,试验开始后,将试样顶部温度调为 -5 °C(或 -15 °C),同时底部的温度保持 5 °C 不变,使得试样自上而下发生单向冻结,12 小时后将试样顶部温度调整为 5 °C,融化 12 小时后再次调整顶部温度为负温,开启下一次循环,一个循环的周期为 24 小时,共模拟 5 个循环,总时长 120 小时。试验在封闭系统中进行,顶部和底部均不进出水。试验过程中未额外施加覆荷载。在模拟过程中部分不随冻融状态和冻融循环次数变化的参数取值见表 1。非饱和土的冻融过程也存在滞后效应,同时随着冻融循环次数的增加,试样的物理力学性质也在不断改变,在已有研究理论及试验结果的基础上,在数值模拟过程中部分随冻融状态和冻融循环次数变化的参数取值见表 2、表 3,且  $\vartheta' = 0.05, m = 5, n = 2$ 。表 3 中的参数由两河口心墙土料的冻融循环试验变化规律取得<sup>[11]</sup>。

图 2(a)、(b)分别为冷端温度为 -5 °C 和 -15 °C 时的顶部位移曲线。试样的冻胀量和融沉量随着

表 1 基本计算参数

参数	单位	数值
孔隙水冻结温度 $T_0$	°C	0
土颗粒密度 $\rho_s$	$\text{kg}/\text{m}^3$	2 715
水密度 $\rho_w$	$\text{kg}/\text{m}^3$	1 000
冰密度 $\rho_i$	$\text{kg}/\text{m}^3$	917
融化潜热 $L$	$\text{kJ}/\text{kg}$	334.56
水体积热容量 $C_w$	$\text{kJ}/\text{m}^3 \cdot \text{K}$	4 180
冰体积热容量 $C_i$	$\text{kJ}/\text{m}^3 \cdot \text{K}$	1 874
空气体积热容量 $C_v$	$\text{kJ}/\text{m}^3 \cdot \text{K}$	1.21
水导热系数 $\lambda_w$	$\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$	0.58
冰导热系数 $\lambda_i$	$\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$	2.22
空气导热系数 $\lambda_v$	$\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$	0.025
上覆荷载 $p$	kPa	2.5
冻土压缩模量 $E_{sf}$	MPa	50
初始孔隙比 $e_0$	—	0.5
分离孔隙比 $e_{sep}$	—	1.2
初始含水率	%	16.8
大气压力 $P_a$	kPa	101
重力加速度 $g$	$\text{m}/\text{s}^2$	9.81

表2 冻结/融化状态的参数取值

Table 2 Parameter values under frozen/thawed conditions

参数	单位	数值	
		冻结	融化
土颗粒体积热容量 $C_s$	$\text{kJ}/\text{m}^3\cdot\text{K}$	2 160	1 810
土颗粒导热系数 $\lambda_s$	$\text{kJ}/\text{m}\cdot\text{K}$	1.2	1.7
试验参数 $\alpha$	—	-4	-7
试验参数 $\beta$	—	-12	-10

表3 不同冻融次数的参数取值

Table 3 Parameters for different freezing-thawing cycles

参数	冻融次数				
	1次	2次	3次	4次	5次
初始压缩系数 $E_{s0}/\text{MPa}$	8.5	8.0	7.0	7.0	6.5
初始渗透系数 $k_s/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$5\text{e}-12$	$1.5\text{e}-11$	$4.5\text{e}-11$	$6.5\text{e}-11$	$7.5\text{e}-11$

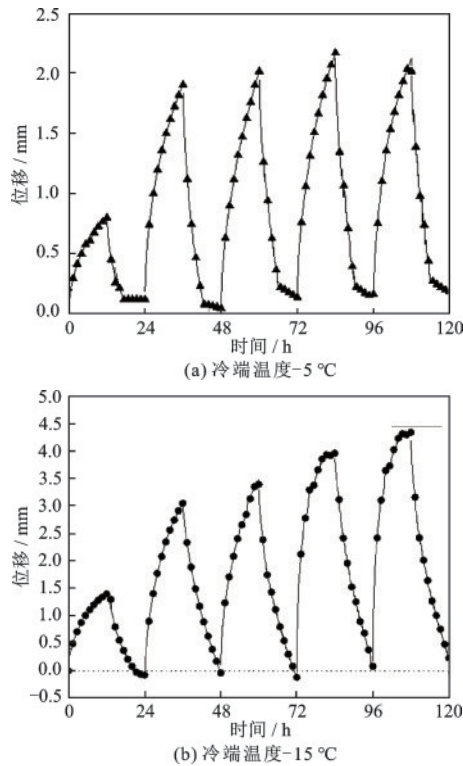


图2 冻融过程中顶部位移曲线

Fig. 2 Displacement curves of the upper surface in the freezing-thawing process

冻融循环次数的逐渐增加而不断增加,且第二次冻融循环时顶部位移的增量最大,增量随冷端温度的降低而增大。冷端温度为 $-5^\circ\text{C}$ 时,第一次循环的冻胀量为 $0.8\text{ mm}$ ,第二次循环冻胀量为 $1.78\text{ mm}$ ,增量为 $0.98\text{ mm}$ ,冷端温度为 $-15^\circ\text{C}$ 时,第一次循环的冻胀量为 $1.41\text{ mm}$ ,第二次循环冻胀量为 $3.13\text{ mm}$ ,

增量为 $1.73\text{ mm}$ 。第一次冻融循环过程中产生的冻胀量,主要是由原位冻胀和少量水分迁移后产生的分凝冻胀组成,因此当冷端温度越低,其冻结范围也越大,产生的冻胀量也就越大。冷端温度越低,试样的冻胀速度越快,同一冻融次数下,冻胀量也越大。冷端温度为 $-15^\circ\text{C}$ 的试样在冻融结束时,融沉尚未达到稳定值,仍有继续沉降的趋势,在5次冻融循环结束时试样最终表现为冻胀,顶部位移为 $0.23\text{ mm}$ (图2(b))。图2(a)中冷端温度较低( $-5^\circ\text{C}$ ),随着冻融次数的增加,在封闭冻融环境下冻结区范围区域稳定,几乎没有水分向冻结区迁移,所以5次之后的冻胀量没有增加,反而略有减小。

图3(a)、(b)分别为冷端温度为 $-5^\circ\text{C}$ 和 $-15^\circ\text{C}$ 时距离试样底端 $1、4、7、10、13\text{ cm}$ 处的温度变化曲线。如图所示,在不同的冷端温度条件下,冻结过程的温度变化规律是相同的,冻结过程中温度先迅速下降,到达一定值后温度缓慢降低并逐渐趋于稳定。冷端温度越低,降温速度越快。由于暖端温度未改变,因此不同冷端温度下试样的融化速度相似。由此可见,冻融循环次数对温度分布的影响较小。

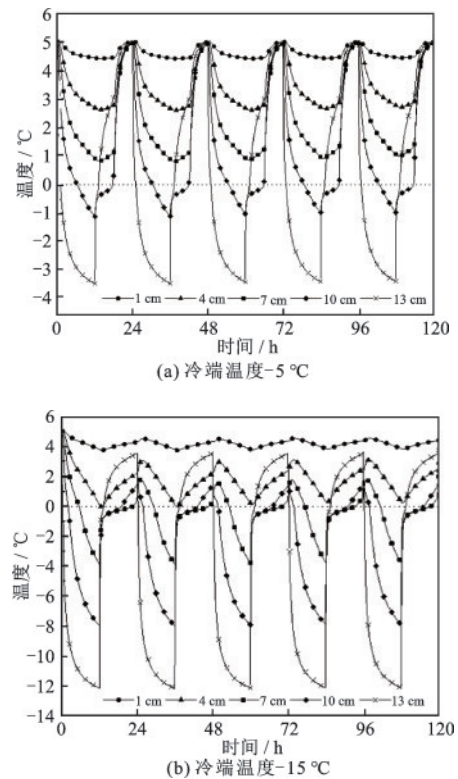


图3 冻融过程中非饱和土柱温度曲线

Fig. 3 Temperature curves of the unsaturated soil column in the freezing-thawing process

图4(a)是两个冷端温度条件下距离底端13.5 cm处冻结结束时的含水率变化曲线。从图中可以看出,冷端温度对试样顶部的影响较小,不同冷端温度下的含水率比较相近,且随着冻结次数增加,该位置处的含水率增长幅度也比较小。距离顶部近(即距离负温端近)的位置,其冻结速度快,冻结锋面停留时间短,从未冻结区迁移的孔隙水较少,分凝冰在此位置处发育较少。图4(b)是两个冷端温度条件下距离底端9.5 cm处冻结结束时的含水率变化曲线。冷端温度为 $-5^{\circ}\text{C}$ 时,9.5 cm处的含水率最大,根据温度分析结果可知,9.5 cm位于冻结锋面上方且距离冻结锋面的距离约1 cm,因此在此冷端温度下,冻结过程的温度分布稳定后,冻结锋面附近将持续有水分迁移,并发生相变产生大量孔隙冰,使得含水率不断增大。在封闭系统中,冷端温度主要对冻结过程的含水率分布产生影响,随着冷端温度的下降,冻结锋面下移,含水率的峰值位置也随之下移。

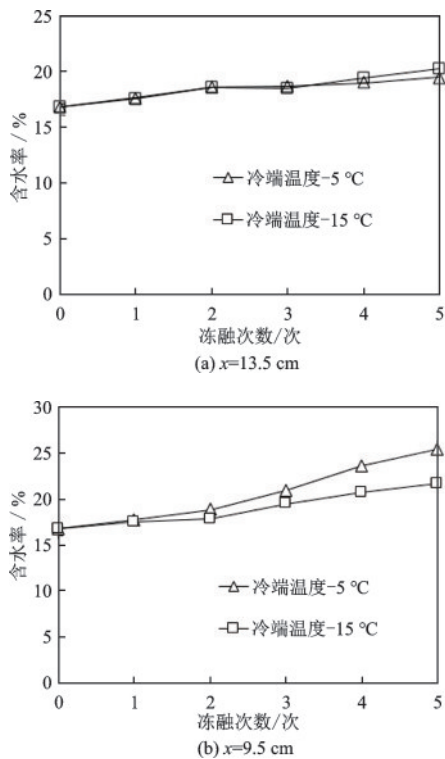


图4 含水率随冻融次数变化曲线

Fig. 4 Variations in water contents in the freezing-thawing process

### 3 结论

把非饱和冻土看作固体土颗粒、冰晶、未冻水

以及孔隙气组成的多孔多相介质,在小变形条件下建立了非饱和土在冻结过程中的热水力耦合方程。考虑冻融过程中的渗透特性、应力应变关系的变化,对单向冻融条件下的非饱和土柱给出了具体的耦合求解方程组,并进行了冻融循环下的数值分析。计算结果表明在同一冻融循环次数时,冷端温度越高,位移量越小,且位移量增长越缓慢;冷端温度越低,降温速度越快,融化速度越慢;冷端温度为 $-5^{\circ}\text{C}$ 、 $-15^{\circ}\text{C}$ 的算例冻结锋面的位置分别在距离底端8.58 cm、4.2 cm处,且随着冷端温度的增大,冻结锋面的位置在不断下移;在封闭系统中,冷端温度对试样顶部的含水率影响较小,且随着冷端温度降低,冻结锋面不断下移,含水率的峰值位置也随之下移。

鉴于非饱和冻土在冻融过程中的复杂性,本文仅对非饱和冻土的多物理场耦合理论以及单向冻融过程进行了初步探讨,为涉及到非饱和土的寒区工程设计和施工提供分析基础。

### 参考文献:

- [1] 周幼吾,郭东信,邱国庆,等. 中国冻土[M]. 北京: 科学出版社, 2000.  
Zhou Y W, Guo D X, Qiu G Q, et al. Frozen soils in China [M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)
- [2] Andersland O B, Ladanyi B. Frozen ground engineering [M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.
- [3] Huang X, Rudolph D L. Coupled model for water, vapour, heat, stress and strain fields in variably saturated freezing soils[J]. Advances in Water Resources, 2021, 154: 103945.
- [4] Li Z, Chen J, Tang A, et al. A novel model of heat-water-air-stress coupling in unsaturated frozen soil[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2021, 175: 121375.
- [5] Lijith K P, Sharma V, Singh D V. A methodology to establish freezing characteristics of partially saturated sands [J]. Cold Regions Science and Technology, 2021, 189: 103333.
- [6] Liu E, Lai Y, Feng J, et al. An elastoplastic model for saturated freezing soils based on thermoporomechanics [J]. International Journal of Plasticity, 2018, 107: 246-285.
- [7] Yin X, Liu E, Song B, et al. Numerical analysis of coupled liquid water, vapor, stress and heat transport in unsaturated freezing soil [J]. Cold Regions Science and

Technology, 2018, 155: 20-28.

[8] Coussy O. Poromechanics [M]. Queensland: John Wiley & Sons, 2004.

[9] Li N, Chen F, Xu B, et al. Theoretical modeling framework for an unsaturated freezing soil[J]. Cold Regions Science and Technology, 2008, 54: 19-35.

[10] Xiao W, Liu E, Yin X, et al. Numerical simulation of coupled liquid water, stress and heat for frozen soil in

the thawing process [J]. Engineering Computations, 2022, 39(4): 1492-1510.

[11] 肖薇. 冻融作用下非饱和心墙坝料水-热-力耦合数值分析[D]. 成都: 四川大学, 2021.

Xiao W. Analysis of coupled liquid water, stress and heat of unsaturated clay of core wall under freeze-thaw cycles [M]. Chengdu: Sichuan University, 2021. (in Chinese)

(本文责编: 池营营)



(上接第 904 页)

[18] Zhang G, Xia C, Yang Y, et al. Experimental study on the thermal performance of tunnel lining ground heat exchangers[J]. Energy and Buildings, 2014, 77: 149-157.

[19] Zhang G, Xia C, Zhao X, et al. Effect of ventilation on the thermal performance of tunnel lining GHEs[J]. Applied Thermal Engineering, 2016, 93: 416-424.

[20] 张国柱, 张玉强, 夏才初, 等. 利用地温能的隧道加热系统及其施工方法[J]. 现代隧道技术, 2015, 52(6): 170-176.

Zhang G Z, Zhang Y Q, Xia C C, et al. Tunnel heating system using geothermal energy and its construction method[J]. Modern Tunnelling Technology, 2015, 52(6): 170-176. (in Chinese)

[21] Zhang G, Xia C, Yang Y, et al. Experimental study on the thermal performance of tunnel lining ground heat exchangers[J]. Energy and Buildings, 2014, 77: 149-157.

[22] Zhang G, Guo Y, Zhou Y, et al. Experimental study on the thermal performance of tunnel lining GHE under groundwater flow[J]. Applied Thermal Engineering, 2016, 106: 784-795.

[23] Di Donna A, Barla M. The role of ground conditions on energy tunnels' heat exchange[J]. Environmental Geotechnics, 2016, 3(4): 214-224.

[24] 上海市地质资源管理处. 上海市地质环境公报[R]. 上海: 上海市规划和自然资源局, 2017.

Department of Shanghai Geological Resources Management. Shanghai geological environment bulletin [R]. Shanghai: Shanghai Municipal Bureau of Planning and Natural Resources, 2017. (in Chinese)

[25] Lemmelä R, Sucksdorff Y, Gilman K. Annual variation of soil temperature at depths 20 to 700 cm in an experimental field in Hyrylä, South-Finland during 1969 to 1973[J]. Geophysica, 1981, 17(1/2): 143-154.



(上接第 944 页)

[15] 黄旭, 孔纲强, 刘汉龙, 等. 夏季制冷循环下 PCC 能量桩负摩阻力特性研究[J]. 防灾减灾工程学报, 2017, 37(4): 511-517.

Huang X, Kong G Q, Liu H L, et al. Negative skin friction behavior of PCC energy pile under heating cycle [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2017, 37(4): 511-517. (in Chinese)

[16] 徐建, 任连伟, 马艳, 等. 冬季工况下微型钢管桩热响应特性数值分析[J]. 防灾减灾工程学报, 2019, 39(4): 665-672.

Xu J, Ren L W, Ma Y, et al. Numerical analysis of thermal response characteristics of micro steel tube pile under winter working condition [J]. Journal of Disaster

Prevention and Mitigation Engineering, 2019, 39(4): 665-672. (in Chinese)

[17] 郝耀虎, 孔纲强, 彭怀风, 等. 桩端约束对桩身热力学特性影响的模拟分析[J]. 防灾减灾工程学报, 2017, 37(4): 532-539.

Hao Y H, Kong G Q, Peng H F, et al. Analysis of thermo-mechanical behavior of single pile tip constraint [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2017, 37(4): 532-539. (in Chinese)

[18] 混凝土结构设计规范: GB 50010—2010[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2011.

[19] 桩基地热能利用技术标准: JGJ/T 438—2018[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2018.